最適仕損検査点の分析

著者	緒方 勇
雑誌名	商学論究
巻	66
号	4
ページ	333-348
発行年	2019-03-10
URL	http://hdl.handle.net/10236/00027940

最適仕損検査点の分析

緒　方　　　勇

要　旨

製品製造において、仕損検査は重要であるにも関わらず、これまで、最適な仕損検査点の数と位置を決定する研究は行われてこなかった。この問題意識の下、本論文では最適仕損検査点の数と位置についての理論的分析を行った。

分析の結果、この問題は最終的には、不等式制約の付いた非線形計画法に帰着することが分かった。また、この非線形計画法は、クーン・タッカー条件の十分性定理が成立する場合は、解析的に解が求まることも判明した。しかしながら、仕損検査点の数が少し増えただけで、解析的に解を求めることは非常に困難になってしまい、現実的には統計ソフトウェアを使って数値計算を行うほうが妥当であることも示唆された。

キーワード：製品検査（product inspection）、検査点（inspection point）、検査費用（inspection cost）、非線形計画法（non-linear programming）、クーン・タッカー条件（Kuhn-Tucker condition）

I　序論

工場で製品を製造するにあたって、仕損検査は重要な要素である。もし仕損検査を全く行わなければ、大量の不良品を出荷してしまい、巨額の外部失敗コストを払う結果となるだろう。しかし、仕損検査を行うことにもコストがかかるので、過剰に仕損検査を行うこともまた、評価コストを不必要に増加させてしまう結果となってしまう。

また、複数の工程を経て製造される複雑な製品を製造する場合、複数個所

に仕損検査点を設けることもある。この場合、どのくらいの数の仕損検査点をどの位置に設置するのが最適なのかを検討する必要もある。なお、一般的には、検査点の位置によって材料検査、中間検査、出荷検査などと名称を変えるが、本論文では名称を変更せず、「仕損検査」の名称で統一する。

仕損検査に関する研究は、主に、生産工学や管理会計の分野で行われてきた。生産工学の分野では、基本的に、「現時点で設置されている仕損検査点を前提として」、具体的にどれだけの数の仕掛品（検査点の位置によっては、検査対象は材料や完成品になるが、これも仕掛品で統一する）を検査するべきかや、標準規格からどの程度外れた場合に不合格品と判定すべきなのかを、統計学の観点から検討したものが中心である。

仕損検査のコストに関する議論はいくつかあるが、仕損検査点に関する議論は見当たらない。例えば藤本（2001）は生産マネジメント分野の主要な教科書の一つであり、検査コストについても議論されているが、それはどの程度の割合を抜き取り検査するべきかという、サンプルサイズの議論であって、検査点の位置についての議論ではない。

管理会計の分野では、コストに関する議論や、仕損検査点の新規設置の可否を検討する議論は盛んに行われている。例えば、工程の特定の位置に新しく仕損検査点を設置するべきか否かについて、コストの観点から検討するような議論は既に意思決定問題として定式化されている。そこでは、差額原価や差額収益を比較・検討し、長期的な設備投資が必要ならば貨幣の時間価値も考慮する意思決定問題として、管理会計の教科書でもよく取り上げられている。

しかしながら、管理会計分野での仕損検査点設置の問題というのは、基本的には、工程の特定の一箇所を指定して、「その位置に仕損検査点を新規に設置するべきか否か、コストの観点から判断する」という意思決定問題として定式化されているだけである。これは、現時点で稼動している工場においては、仕損検査点新設の意思決定は、大抵の場合は、候補となる一箇所に新設するかしないかの意思決定となるだろうから、この管理会計の教科書に書

かれてあるような解決法で問題はない。

しかし、工程の複数個所に仕損検査点を設置する場合に、仕損検査点新設の可否を一箇所ずつ検討するような、逐次的な意思決定方法では、最終的に全体最適とならない位置に仕損検査点を設置してしまう可能性が高い。特に、工場を新設する時など、新しく製造工程全体を設計するときは、最初から、全体最適となるように、複数の仕損検査点の位置をすべて同時に決定しなければならない。

そこで本論文では、全体最適となる仕損検査点の位置を決定するための数理モデルを構築する。分析を簡略化するために、仕損検査に関して、全数検査、仕損発見率100％など、いくつかの仮定をおいた。分析の結果、この問題は不等式制約の非線形計画法として一般に記述できることが判明した。また、一定の条件を満たす場合、その解はクーン・タッカー条件の十分性定理を満たすことが判明した。

本研究はいまだ基礎的な分析に止まっており、結果は限定的なものである。今後はより一般的な状況の下で成立するモデルの構築が求められる。

論文の構成は次の通りである。Ⅱでは、モデルの枠組みについて説明する。Ⅲでは、モデルの解法について説明する。Ⅳではまとめと今後の課題について説明する。

Ⅱ　モデルの枠組み

1．モデルの仮定や前提

議論を簡単にするために、以下の仮定や前提を置く。

⑴　仕損検査点を設ける理由として、製造責任者の責任を明確にするため（誰が作業ミスをしてしまったのかを明確にするため）、なども考えられるが、本研究では、あくまでも「費用・収益」の観点からのみ検討する。

⑵　本来、検査点の位置により、材料検査、中間検査、出荷検査など呼び方を変えるが、本研究では特に呼び方を変えず、「仕損検査」で統一する。

⑶　全数検査（サンプル検査でない）。必然的に、非破壊検査となる。

⑷　検査を行うと、100％確実に、合格品と不合格品に識別でき、識別ミスはないものとする。また、その検査点までに行われたすべての加工作業を検査できるものとする。

　例えば、ある工場の出荷検査では、完成品が正常に動作するかしないかだけを検査しているとする。このとき、もしも、製品内部のネジが１本足らず、本来であれば耐久性不足のため不合格品となるべき完成品であっても、出荷検査で最低限の動作確認しかしない場合は、耐久性不足を検出できず、合格品と判断してしまうだろう。本研究では、このようなことはないものとする。

⑸　仕損検査で検出された不合格品は、そのまま処分費用ゼロで処分する（不合格品を修理して合格品にすることはない。また、不合格品に評価額はない）。

⑹　加工作業中のミスにより、不合格品が発生する。ただし、その不合格品が明らかになるのは仕損検査を行った時であり、それまでは、潜在的な不合格品にとどまる。

　潜在的な不合格品と合格品は、仕損検査を行うまで区別できない。そのため、潜在的な不合格品に対しても加工作業は通常通り投入される。

⑺　潜在的な不合格品が、加工作業の途中で合格品に変化することはない。

⑻　減損はない。

⑼　始点投入材料の時点では、不良品はない。

⑽　潜在的な不合格品を明らかにして製造ラインから除外することで、潜在的な不合格品に対して加工作業を行うという、ムダを削減できる。

⑾　不合格品を出荷してしまうと、クレーム発生や評判低下などのコストが発生する。

⑿　仕損検査にはコストがかかる。

２．数理モデル

　まず、次のように変数を定義する。

- α：減損や仕損が全くない状態で、材料１単位を完成品にするために必要な加工コスト。すべて変動費とする。
- β：不良品１単位を出荷してしまうことで発生するコスト。すべて変動費とする。
- γ：仕掛品や製品１単位を仕損検査するための検査コスト。すべて変動費とする。（単位検査コストは、検査を行う進捗度の影響を受けるはずだが、簡単にするために、進捗度に関わらず一定とする）

また、（潜在的な）不良品量を表す関数を、仕損関数 $g(x)$ として定義する。x は加工進捗度を表し、また始点材料投入量を１とする。すると、不良品が良品に転換することはないので、$g(x)$ は広義の単調増加関数と仮定する。

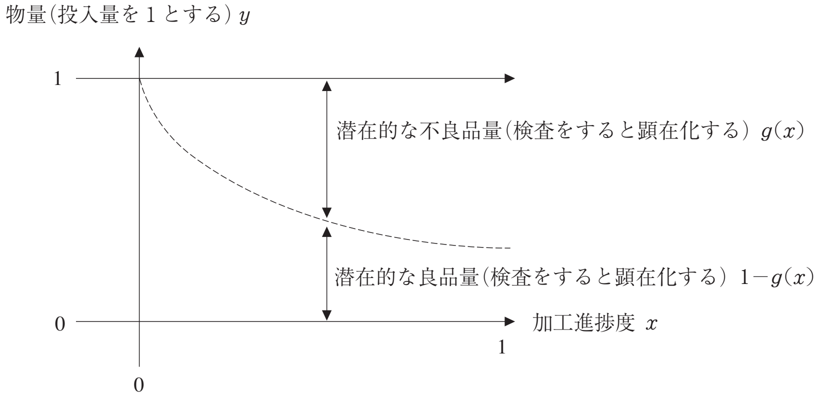
$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$　とするとき、$0 \leqq g(x_1) \leqq g(x_2) \leqq 1.$

第１図は、仕損関数 $g(x)$ の概形の一例を示している。良品量（$1-g(x)$）は右下がりのグラフとなる。

第２図は、無検査（n を検査点の数とすると、$n=0$）の場合のコストを表す。この場合のコストは、次式となる。

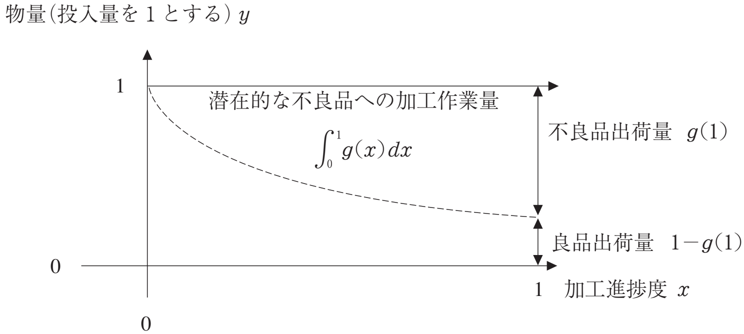
$$\underset{n=0}{\mathrm{Cost}} = \alpha\int_0^1 g(x)\,dx + \beta * g(1). \tag{1}$$

第１図　仕損関数 $g(x)$



第２図　無検査（$n=0$）のコスト

$$\underset{n=0}{\mathrm{Cost}}=\alpha\int_0^1 g(x)\,dx+\beta * g(1)$$

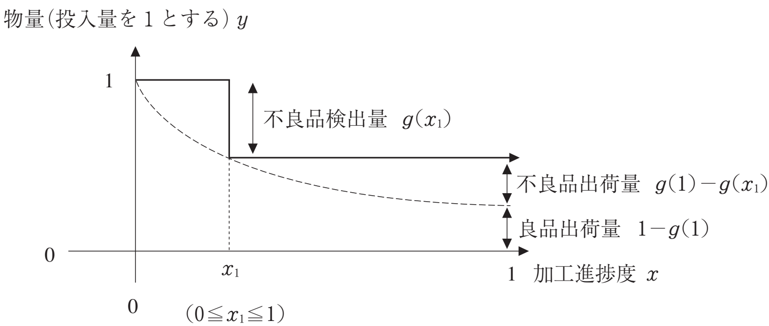


第３図は、１回検査（$n=1$）の場合のコストを表す。x_1 は仕損検査点の進捗度である。この場合のコストは、次式となる。

$$\begin{aligned}\underset{n=1}{\mathrm{Cost}}&=\alpha\left[\int_0^{x_1} g(x)\,dx+\int_{x_1}^1 \{g(x)-g(x_1)\}\,dx\right]+\beta\{g(1)-g(x_1)\}+\gamma * 1\\&=\alpha\left[\int_0^1 g(x)\,dx-g(x_1)\int_{x_1}^1 dx\right]+\beta\{g(1)-g(x_1)\}+\gamma\\&=\alpha\left[\int_0^1 g(x)\,dx-(1-x_1) * g(x_1)\right]+\beta\{g(1)-g(x_1)\}+\gamma\end{aligned}$$

第３図　１回検査（$n=1$）のコスト

$$\underset{n=1}{\mathrm{Cost}}=\alpha\left[\int_0^{x_1} g(x)\,dx+\int_{x_1}^1 \{g(x)-g(x_1)\}\,dx\right]+\beta\{g(1)-g(x_1)\}+\gamma * 1$$



$$=\underset{n=0}{\mathrm{Cost}}-\alpha(1-x_1)*g(x_1)-\beta*g(x_1)+\gamma. \tag{2}$$

ここで、

$$\underset{n=1}{\mathrm{Benefit}}=\underset{n=0}{\mathrm{Cost}}-\underset{n=1}{\mathrm{Cost}}$$
$$=\alpha(1-x_1)*g(x_1)+\beta*g(x_1)-\gamma \tag{3}$$

とおく。Benefit が正なら、その進捗度 x_1 で仕損検査を行うべきである。

第4図は、2回検査（$n=2$）の場合のコストを表す。x_1 と x_2 は仕損検査点の進捗度である。仕損検査点の位置関係を、

$$x_0=0\leq x_1<x_2\leq 1=x_3$$

とする（今後の議論のため、$x_0=0$、$x_{n+1}=1$ の変数を導入しておく）。この時、始点投入材料の時点での不良品はないものと仮定しているので、

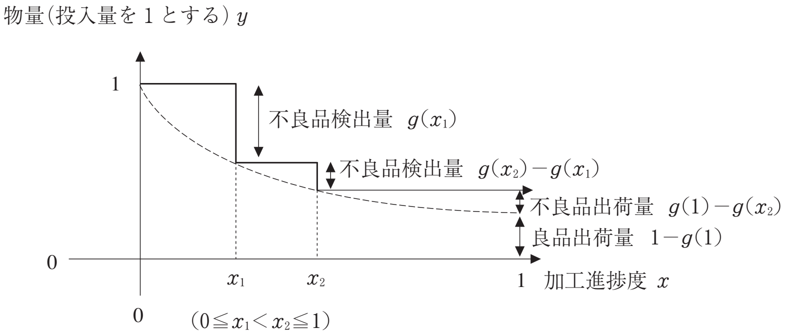
$$g(x_0)=g(0)=0$$

である。この場合のコストとベネフィットは、次式となる。

$$\underset{n=2}{\mathrm{Cost}}=\alpha\left[\int_0^{x_1}g(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\{g(x)-g(x_1)\}\,dx+\int_{x_2}^{1}\{g(x)-g(x_2)\}\,dx\right]$$
$$+\beta\{g(1)-g(x_2)\}+\gamma[\{1\}+\{1-g(x_1)\}]$$
$$=\underset{n=0}{\mathrm{Cost}}-\alpha[(x_2-x_1)*g(x_1)+(1-x_2)*g(x_2)]$$

第4図　2回検査（$n=2$）のコスト

$$\underset{n=2}{\mathrm{Cost}}=\alpha\left[\int_0^{x_1}g(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\{g(x)-g(x_1)\}\,dx+\int_{x_2}^{1}\{g(x)-g(x_2)\}\,dx\right]$$
$$+\beta\{g(1)-g(x_2)\}+\gamma[\{1\}+\{1-g(x_1)\}]$$



$$-\beta * g(x_2)+\gamma[2-g(x_1)], \tag{4}$$

$$\underset{n=2}{\text{Benefit}}=\underset{n=0}{\text{Cost}}-\underset{n=2}{\text{Cost}}$$
$$=\alpha[(x_2-x_1)*g(x_1)+(1-x_2)*g(x_2)]$$
$$+\beta * g(x_2)-\gamma[2-g(x_1)]. \tag{5}$$

以上を踏まえると、N 回検査（$n=N$）のモデルは次のようになる。まず、N 個の仕損検査点の位置を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ とする。また検査点の位置関係を、

$$x_0=0\leq x_1<\cdots<x_N\leq 1=x_{N+1} \tag{6}$$

としておく。この時、始点投入材料の時点での不良品はないものと仮定しているので

$$g(x_0)=g(0)=0 \tag{7}$$

である。この場合のコストとベネフィットは、次式となる。

$$\underset{n=N}{\text{Cost}}=\underset{n=0}{\text{Cost}}-\alpha[(x_2-x_1)*g(x_1)+(x_3-x_2)*g(x_2)$$
$$+\cdots+(x_{N+1}-x_N)*g(x_N)]-\beta * g(x_N)$$
$$+\gamma[\{1\}+\{1-g(x_1)\}+\cdots+\{1-g(x_{N-1})\}]$$
$$=\underset{n=0}{\text{Cost}}-\alpha\sum_{n=1}^{N}(x_{n+1}-x_n)*g(x_n)$$
$$-\beta * g(x_N)+\gamma\left[N-\sum_{n=1}^{N-1}g(x_n)\right], \tag{8}$$

$$\underset{n=N}{\text{Benefit}}=\underset{n=0}{\text{Cost}}-\underset{n=N}{\text{Cost}}$$
$$=\alpha\sum_{n=1}^{N}(x_{n+1}-x_n)*g(x_n)+\beta * g(x_N)-\gamma\left[N-\sum_{n=1}^{N-1}g(x_n)\right]. \tag{9}$$

3．N 回検査モデルの定式化

今、求めたいのは(6)式の制約の下で、(9)式を最大にする N、及び $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の値を求めることである。これが、最適仕損検査点の数と位置を表す。このままでは計算しづらいので、次のように式を書き換える。

まず、$n\geqq 1$ として、

$$y_n=x_n-x_{n-1}$$

とおく。すると、

$$y_n \geq 0 \quad (n=1, 2, \cdots, N+1),$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_{N+1}=1,$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_N \leq 1$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_n &= (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) \\ &= x_n-x_0 \\ &= x_n \end{aligned}$$

である。これを使うと、最適仕損検査点を求めるモデルは、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \underset{n=N}{\text{Benefit}} &= \underset{n=0}{\text{Cost}} - \underset{n=N}{\text{Cost}} \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{N} y_{n+1} * g(y_1+y_2+\cdots+y_n) + \beta * g(y_1+y_2+\cdots+y_N) \\ &\quad -\gamma \left[N - \sum_{n=1}^{N-1} g(y_1+y_2+\cdots+y_n) \right] \end{aligned} \tag{10}$$

を最大にする N、及び $y_1, y_2, \cdots, y_{N+1}$ の値を求める。ただし、

$$y_n \geq 0 \quad (n=1, 2, \cdots, N+1),$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_{N+1}=1$$

である。これは、等式制約の付いた非線形計画法である。

4．不等式制約のついた非線形計画法としての N 回検査モデル

先のモデルはまた、 y_{N+1} を削除して、不等式制約（$y_1+y_2+\cdots+y_N \leq 1$）の付いた非線形計画法として表現することも可能である。この場合は次のようになる。

$$\begin{aligned} \underset{n=N}{\text{Benefit}}(\boldsymbol{y}) &= \underset{n=0}{\text{Cost}} - \underset{n=N}{\text{Cost}}(\boldsymbol{y}) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1} * g(y_1+y_2+\cdots+y_n) \\ &\quad + \alpha \{1-(y_1+y_2+\cdots+y_N)\} * g(y_1+y_2+\cdots+y_N) \end{aligned}$$

$$+\beta * g(y_1+y_2+\cdots+y_N)$$
$$-\gamma\left[N-\sum_{n=1}^{N-1} g(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]\quad (\text{目的関数}) \tag{11}$$

を最大にする N、及び $y_1, y_2, \cdots, y_N$ の値を求める。ただし、

$$y_n \geq 0 \quad (n=1, 2, \cdots, N) \quad (\text{非負制約}), \tag{12}$$
$$y_1+y_2+\cdots+y_N \leq 1 \quad (\text{制約条件}). \tag{13}$$

Ⅲ　モデルの解法

1．クーン・タッカー条件の十分性定理

不等式制約の付いた非線形計画法の解は一般に複雑であるが、クーン・タッカー条件の十分性定理が成立する場合は、解析的に解が求まることが知られている（チャン・ウエインライト（2010））。

【クーン・タッカー条件の十分性定理】

- 非線形計画法
  制約条件 $g^m(\boldsymbol{x}) \leq r_m$（$m=1, 2, \cdots, M$）及び $x_n \geq 0$（$n=1, 2, \cdots, N$）の下で目的関数 $\pi=f(\boldsymbol{x})$ を最大化する。（$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_N)'$ とする）
- この非線形計画法において、次の2つの条件が共に満たされた場合、クーン・タッカー条件はこの非線形計画法の解の十分条件を与える。
  - ➢　目的関数は微分可能で、非負の象限において凹である。
  - ➢　各制約条件の関数が微分可能で、非負の象限において凸である。
- クーン・タッカー条件

  ラグランジュ関数を $Z=f(\boldsymbol{x})+\sum_{m=1}^{M}\lambda_m[r_m-g^m(\boldsymbol{x})]$ とおいて、

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} \leq 0,\ x_n \geq 0,\ x_n\frac{\partial Z}{\partial x_n}=0 \quad (n=1, 2, \cdots, N)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_m} \geq 0,\ \lambda_m \geq 0,\ \lambda_m\frac{\partial Z}{\partial \lambda_m}=0 \quad (m=1, 2, \cdots, M)$$

N 回検査モデルにあてはめると、制約条件の⒀式は、微分可能であり、非負の象限において凸となっているが、目的関数の⑾式が微分可能で、非負の象限において凹であるかは、仕損関数 $g(x)$ の形状に依存する。

また、最適な検査点の数 N を求めるために、$\underset{n=1}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})$, $\underset{n=2}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})$, …, $\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})$ のそれぞれの非線形計画法の解を求めて、その中で最大となる n が最適検査点の数 N となる。

クーン・タッカー条件の十分性定理が成立しているならば、解を解析的に求めることも（一応）可能ではあるが、実際には n の値が大きくなると、簡単な仕損関数の場合であっても、かなり厳しくなる。そのため、実際には数値計算の方が手っ取り早いかもしれない。

2．線形仕損関数の場合の解

ここでは、最も簡単な仕損関数の例として、線形仕損関数

$$g(x)=wx \quad (0\leq w\leq 1)$$

の場合の解を示す。まず、この線形仕損関数の下で、目的関数の⑾式が微分可能で、非負の象限において凹であることを示す。⑾式は次式となる。

$$\begin{aligned}
\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y}) &= \underset{n=0}{\mathrm{Cost}}-\underset{n=N}{\mathrm{Cost}}(\boldsymbol{y}) \\
&= \alpha\sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1} * g(y_1+y_2+\cdots+y_n) \\
&\quad +\alpha\{1-(y_1+y_2+\cdots+y_N)\} * g(y_1+y_2+\cdots+y_N) \\
&\quad +\beta * g(y_1+y_2+\cdots+y_N)-\gamma\left[N-\sum_{n=1}^{N-1} g(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right] \\
&= \alpha\sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1} * w * (y_1+y_2+\cdots+y_n) \\
&\quad +\alpha\{1-(y_1+y_2+\cdots+y_N)\} * w * (y_1+y_2+\cdots+y_N) \\
&\quad +\beta * w * (y_1+y_2+\cdots+y_N) \\
&\quad -\gamma\left[N-\sum_{n=1}^{N-1} w * (y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで、αw の項にのみ注目すると、次式となる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1} * (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\
&\quad + \{1 - (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)\} * (y_1 + y_2 + \cdots + y_N) \\
&= y_2 * (y_1) + y_3 * (y_1 + y_2) + y_4 * (y_1 + y_2 + y_3) \\
&\quad + \cdots + y_N * (y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1}) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_N) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)^2 \\
&= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + \cdots + y_N)^2 - \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_N^2) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_N) \\
&\quad - (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)^2 \\
&= -\frac{1}{2}(y_1 + y_2 + \cdots + y_N)^2 - \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_N^2) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_N)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

よって、目的関数の1回微分は次式となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_1}\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y}) &= B_1^{(N)} \\
&= \alpha w[-(y_1 + y_2 + \cdots + y_N) - y_1 + 1] + \beta w + \gamma w(N-1), \\
\frac{\partial}{\partial y_2}\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y}) &= B_2^{(N)} \\
&= \alpha w[-(y_1 + y_2 + \cdots + y_N) - y_2 + 1] + \beta w + \gamma w(N-2), \\
&\ \ \vdots \\
\frac{\partial}{\partial y_N}\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y}) &= B_N^{(N)} \\
&= \alpha w[-(y_1 + y_2 + \cdots + y_N) - y_N + 1] + \beta w + \gamma w(N-N).
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\frac{\partial^2}{\partial y_s \partial y_t}\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y}) = B_{st}^{(N)}
$$

と表記すると、この目的関数のヘッセ行列は次式となる。

$$
\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{y} \partial \boldsymbol{y}'}\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} B_{11}^{(N)} & \cdots & B_{1N}^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1}^{(N)} & \cdots & B_{NN}^{(N)} \end{pmatrix}
$$

$$=\alpha w\begin{pmatrix}-2 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -2 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -2\end{pmatrix}.$$

ここで、このヘッセ行列の行列式を考える。

$$\left|\alpha w\begin{pmatrix}-2 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -2 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -2\end{pmatrix}\right|=(-\alpha w)^N\begin{vmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}$$
$$=(-\alpha w)^N * (N+1).$$

この行列式は、N が偶数なら正となり、N が奇数なら負となる。よって、このヘッセ行列は負値定符号行列である。そのため、目的関数 $\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})$ は凹関数となる。よって、線形仕損関数の下では、クーン・タッカー条件の十分性定理が成立しているので、解析的に解が求まる。

なお、この目的関数 $\underset{n=N}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})$ の β、γ の係数部分は、$y_1, y_2, \cdots, y_N$ に関して一次式となっているので、2 回微分をとるとゼロになることは明らかである。実際、ヘッセ行列を見ると、β、γ の係数部分は消えている。

また、理論上は $\alpha>0$、$w\geqq 0$ であるが、$w=0$ の時、$g(x)=wx=0$ となるので、「仕損は発生していない」ことを意味する。仕損が発生しないのなら、仕損検査をする意味はないので、明らかに「0 回検査（検査なし）」が最適となる。よって、ヘッセ行列を考える際に、$w=0$ のケースは除外して、$w>0$ としてしまうと、ヘッセ行列が零行列とならないので分かりやすいかもしれない。

線形仕損関数の下での解は次の通りである。なお、導出にはクーン・タッカー条件の十分性定理を用いるが、具体的な計算過程は省略する。

- 0 回検査（$n=0$）

$n=0$ の場合、明らかに次式が成立する。

$$\underset{n=0}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})=\underset{n=0}{\mathrm{Cost}}-\underset{n=0}{\mathrm{Cost}}(\boldsymbol{y})$$
$$=0.$$

● 1回検査（$n=1$）

$n=1$ の場合、⑷式を使うよりも、⑶式に $g(x)=wx$、$x_1=y_1$ を代入したほうが分かりやすい。α と β の大小関係により。2つの場合を区別する。

ｉ．$\beta<\alpha$ の場合

$$\underset{n=1}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})=\frac{w(\alpha+\beta)^2}{4\alpha}-\gamma,\quad ただし\quad y_1=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha},\ \lambda=0.$$

この場合、仕損検査点の進捗度は50％以降の点となるが、終点（100％点）にはならない。

ii．$\alpha\leq\beta$ の場合

$$\underset{n=1}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})=\beta w-\gamma,\quad ただし\quad y_1=1,\ \lambda=(-\alpha+\beta)w.$$

この場合、不良品出荷のコスト β が大きく、それを回避するために仕損検査点の進捗度は終点（100％点）となる。

● 2回検査（$n=2$）

$n=2$ 以降は、⒁式を用いる。α、β と γ の大小関係により。3つの場合を区別する。

ｉ．$2\beta<\alpha-\gamma$ の場合

$$\underset{n=2}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})=\alpha w\{y_1y_2+(y_1+y_2)-(y_1+y_2)^2\}$$
$$+\beta w(y_1+y_2)+\gamma wy_1-2\gamma,$$
$$ただし\quad y_1=\frac{(\alpha+\beta+2\gamma)}{3\alpha},\ y_2=\frac{(\alpha+\beta-\gamma)}{3\alpha},\ \lambda=0.$$

この場合、2回目の仕損検査点（y_1+y_2）は終点（100％点）にはならない。

ii．$\alpha-\gamma\leq 0$ の場合

$$\underset{n=2}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})=\alpha w\{y_1y_2+(y_1+y_2)-(y_1+y_2)^2\}$$

$$+\beta w(y_1+y_2)+\gamma w y_1-2\gamma,$$

ただし　$y_1=1,\ y_2=0,\ \lambda=w(-\alpha+\beta+\gamma).$

これは検査コストが非常に高い場合である。この場合、終点（100％点）で２回連続して検査を行う、という解が求まる。もちろん、この場合は２回目の検査にはまったく意味がない（検査コストの無駄遣い）ため、これだったら終点で１回検査のほうが望ましいことは明らかである。よって、この場合は最適検査点の数 N は２より小さいことが分かる。

ⅲ．$0<\alpha-\gamma\leq 2\beta$ の場合

$$\underset{n=2}{\mathrm{Benefit}}(\boldsymbol{y})=\alpha w\{y_1y_2+(y_1+y_2)-(y_1+y_2)^2\}$$
$$+\beta w(y_1+y_2)+\gamma w y_1-2\gamma,$$

ただし　$y_1=\dfrac{(\alpha+\gamma)}{2\alpha},\ y_2=\dfrac{(\alpha-\gamma)}{2\alpha},\ \lambda=\dfrac{w(-\alpha+2\beta+\gamma)}{2}.$

この場合、２回目の仕損検査点（y_1+y_2）は終点（100％点）になる。

- ３回検査（$n=3$）以降も解析的に求めることは可能ではあるが、実際にはかなり困難である。Ｒなどの統計ソフトウェアを用いて、数値計算を行う方が現実的だろう。

Ⅳ　まとめと今後の課題

製品製造において、仕損検査は重要であるにも関わらず、これまで、最適な仕損検査点の数と位置を決定する研究は行われてこなかった。この問題意識の下、本論文では最適仕損検査点の数と位置についての理論的分析を行った。

分析の結果、この問題は最終的には、不等式制約の付いた非線形計画法に帰着することが分かった。また、この非線形計画法は、クーン・タッカー条件の十分性定理が成立する場合は、解析的に解が求まることも判明した。しかしながら、仕損検査点の数が少し増えただけで、解析的に解を求めること

は非常に困難になってしまい、現実的には統計ソフトウェアを使って数値計算を行うほうが妥当であることも示唆された。

製造ラインを新規に立ち上げる時、工程のどの位置に検査点を設けるかは、考慮すべき問題の一つである。実際には、技術的観点からいくつかの検査候補点をリストアップし、その中から最適な検査点の組み合わせを求めるものと思われる。

製造ラインが長くなり、最適な検査点の数が多くなればなるほど、その最適解の探索は非常に難しくなる。しかしながら、検査点の位置を後から変更してしまうと、全体として最適な検査点の組み合わせにならない可能性が高いので、新規立ち上げの段階で、慎重に検査点の組み合わせを考える必要がある。

本論文では、非常に簡単な設定の下でモデルを構築したけれど、現実はもっと複雑である。今後は、現実の状況に即した設定の下でモデルを構築する必要がある。また、モデルの解は数値計算により得たほうが実用的なので、R などの統計ソフトウェアでのプログラム作成も必要である。

（筆者は関西学院大学経営戦略研究科准教授）

謝辞

本論文は2017年度第３回日本組織会計学会研究会（2018年３月24日、上智大学）において発表した内容を加筆・修正したものであり、この研究会において、浜田和樹先生や門田安弘先生をはじめ、多数の先生方から示唆に富む御意見を頂いた。

また、白川透先生からも貴重な御意見を頂いた。ここに記して感謝申し上げる。勿論、本論文に残った誤りはすべて筆者の責任である。

参考文献

A.C. チャン・K. ウエインライト（2010）『現代経済学の数学基礎（上、下）第４版』シーエーピー出版（小田正雄・高森寛・森崎初男・森平爽一郎　訳）。

藤本隆宏（2001）『生産マネジメント入門［Ⅰ］ ―生産システム編―』日本経済新聞出版社。